p-Адическая декогеренция *

Е. И. Зеленов

1 января 2012 года

Аннотация

Вводится понятие адельной декогеренции. Рассматривается эффект коллапса волновой функции при адельной декогеренции.

1 Введение

В контексте настоящей статьи декогеренция понимается в самом общем виде как процесс появления классических свойств в квантовой системе. В стандартном подходе классические свойства в квантовой системе появляются в процессе взаимодействия этой системы со своим окружением. [1] Особенностью предлагаемого подхода является рассмотрение квантовомеханической системы одновременно во всех пополнениях поля рациональных чисел, то есть над полем вещественных чисел и над полями p-адических чисел.

Идея рассмотрения физических систем над различными числовыми полями была предложена в работе [2]. Обширную библиографию по этому вопросу можно найти в книге [3] и обзоре [4].

Идея адельного подхода была предложена и развита в работах [5], [6], [7], [8], [9], [10] и многих других авторов.

2 Классическая система

Через $\mathbb{Q}$ обозначим поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}_p$ - поле p-адических чисел, $\mathbb{Q}_\infty$ - поле вещественных чисел.

*Работа выполненна при финансовой поддержке РФФИ

Рассмотрим простейший случай классической системы - свободную одномерную частицу. Фазовым пространством F_p этой системы является двумерное пространство над $\mathbb{Q}_p$ с заданной невырожденной симплектической формой B_p. На форму B_p наложим дополнительное условие рациональности: $B_p(z,z') \in \mathbb{Q}$ для всех $z \in \mathbb{Q}^2, z' \in \mathbb{Q}^2$. Динамика системы задается линейным симплектическим преобразованием пространтсва (F_p, V_p), то есть элементом из $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

3 Квантовая система

В качестве квантового объекта будем рассматривать представление коммутационных соотношений в форме Вейля.

Пусть H_p - комплексное Гильбертово пространство, W_p - сильно непрерывное отображение фазового пространства F_p в семейство унитарных операторов на H_p, удовлетворяющее соотношению

$$W_p(z)W_p(z') = \chi_p(B(z,z'))W_p(z')W_p(z),$$

где $\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x)$, $\chi_p(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$, $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Далее будем рассматривать только неприводимые представления.

Далее индекс p будем опускать, поскольку формулы единообразны для всех p. Если преобразование классической системы дается симплектическим преобразованием T, то преобразование квантовой системы определяется унитарным оператором $U(T)$:

$$U(T)W\left(T^{-1}z\right) = W(z)U(T).$$

4 Представление Картье

Наиболее широко используются координатное и импульсное представления коммутационных соотношений (представление Шредингера). Мы будем использовать представление Картье. [12], [13]

Пусть L - решетка в пространстве F, то есть свободный $\mathbb{Z}_p$-модуль ранга 2. Заметим, что в случае $p = \infty$ - это дискретное подмножество F_∞, при $p \neq \infty$ - компактное подмножество F_p.

Определим двойственную решетку L^* по следующему правилу

$$z \in L^* \iff B_p(z, z') \in \mathbb{Z}_p \, \forall z' \in L.$$

Пусть $L = L^*$ - самодвойственная решетка. Пространство представления Картье H^L состоит из комплекснозначных функций на F, обладающих следующими свойствами

$$f \in H^L \iff f \in L_2\left(F/L\right), f(s+u) = \chi\left(1/2B(s,u)\right) f(s) \, \forall u \in L.$$

Пространство H^L является Гильбертовым пространством относительно нормы $\|f\| = \int_{F/L} |f(s)|^2 ds$. В вещественном случае множество F/L компактно, в p-адическом - дискретно, в этом случае интеграл вырождается в сумму. Заметим также, что квадрат модуля волновой функции инвариантен относительно сдвигов на вектор решетки, поэтому представление Картье можно рассматривать как квантовую систему на множестве F/L.

Операторы представления задаются формулой

$$\left(W^L(z) f\right)(s) = \chi\left(1/2B(z,s)\right) f(s-z).$$

Можно показать ([12], [13]), что пара $\left(H^L, W^L\right)$ задает неприводимое представление коммутационных соотношений для любой самодвойственной решетки L.

5 Когерентные состояния

Прежде всего определим вакуумный вектор для нашей квантовой системы. Поскольку мы рассматриваем неприводимые представления, любой ненулевой вектор из пространства представления является циклическим вектором и может быть выбран в качестве вакуумного вектора. Поэтому в данной задаче выбор вакуумного вектора - просто вопрос удобства.

Для случая $p \neq \infty$ вакуумный вектор определим по формуле

$$\Omega_p(s) = \begin{cases} 1, s \in L, \\ 0, s \notin L. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция Ω_p лежит в пространстве H^L, при этом имеет компактный носитель.

В случае $p=\infty$ через $F_u, u \in L$ обозначим элемент множества F/L, содержащий элемент u решетки L, $F=\cup_{u\in L}F_u$, $F_u \cap F_v = \emptyset, u \neq v$. Вакуумный вектор определим по формуле

$$\Omega_\infty\big|_{F_u}(s) = \chi_\infty\left(\frac{1}{2}B(s,u)\right).$$

Несложно проверить, что $\Omega_\infty \in H^L$. В отличие от p-адического случая, Ω_∞ не является непрерывной функцией и ее носитель - все пространство F.

Когерентным состоянием (см., например, [11]) будем называть вектор Ω_p^z в H_p^L вида

$$\Omega_p^z = W_p^L(z)\Omega_p.$$

Справедливы следующие утверждения. В случае $p \neq \infty$

$$\left(\Omega_p^z, \Omega_p^{z'}\right) = \begin{cases} 1, z-z' \in L, \\ 0, z-z' \notin L; \end{cases}$$

$$\left(\Omega_\infty^z, \Omega_\infty^{z'}\right) = 0 \iff z-z' \in L.$$

Семейства когерентных состояний вида $\{\Omega_p^z, z \in F_p/L_p, p \neq \infty\}$ и $\{\Omega_\infty^u, u \in L_\infty\}$ образуют ортонормированные базисы в соотвнтствующих пространствах H_p^L.

6 Адельное представление

Теперь построим тензорное произведение представлений $\left(H_p^L, W_p^L\right)$ по всем p, включая $p=\infty$.

Для этого рассмотрим векторное пространство $\mathbb{H}'$ над полем комплексных чисел, натянутое на вектора вида

$$\phi(Z) = \phi_\infty(z_\infty)\prod_p \phi_p(z_p),$$

где $Z=(z_\infty, z_2, z_3, z_5, \dots, z_p, \dots) \in \mathbb{A}^2$, $\mathbb{A}$ - кольцо аделей, и не более чем конечное число сомножителей отлично от $\Omega_p(z_p)$. На $\mathbb{H}'$ зададим естественным образом скалярное произведение

$$(\phi,\psi) = (\phi_\infty,\psi_\infty)\prod_p (\phi_p,\psi_p).$$

На пространстве $\mathbb{H}'$ определим операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$

$$\mathbb{W}(Z)\phi = W_\infty(z_\infty)\phi_\infty \prod_p W_p(z_p)\phi_p.$$

Поскольку справедливо равенство $W_p(z_p)\Omega_p = \Omega_p$ для всех $z_p \in L_p$, то операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$ отображают $\mathbb{H}'$ в $\mathbb{H}'$.

Пространство адельного представления $\mathbb{H}$ определим как замыкание предгильбертова пространства $\mathbb{H}'$ относительно естественной нормы, операторы $\mathbb{W}(Z)$ единственным образом продолжаются до унитарных операторов на $\mathbb{H}$. При этом, справедливы следующие коммутационные соотношения для всех $Z, Z' \in \mathbb{A}^2$:

$$\mathbb{W}(Z)\mathbb{W}(Z') = \chi_\infty\left(B_\infty(z_\infty, z'_\infty)\right) \prod_p \chi_p\left(B_p(z_p, z'_p)\right) \mathbb{W}(Z')\mathbb{W}(Z).$$

7 Декогеренция и коллапс волновой функции

Пусть теперь F - двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, B - невырожденная симплектическая форма на F, принимающая рациональные значения. Для всякого простого p и $p = \infty$ пространство F пополняется до пространства F_p, форма B естественным образом продолжается до невырожденной симплектической формы B_p на F_p. Действительно, исходная форма B в силу линейности является непрерывной в p-адической топологии на F для всех p. Пусть L - самодвойственная $\mathbb{Z}$-решетка в F. Замыкание L в вещественной или p-адических топологиях на пространстве F дают соответствующие самодвойственные $\mathbb{Z}_p$-решетки L_p. Построим соответствующие представления Картье $\left(H_p^L, W_p^L\right)$ коммутационных соотношений и их тензорное произведение $(\mathbb{H}, \mathbb{W})$.

Рассмотрим произвольные векторы $r, r' \in F$. Через R, R' обозначим векторы в пространстве $\mathbb{A}^2$ вида $R = (r, r, \ldots, r, \ldots), R' = (r', r', \ldots, r', \ldots)$. Справедлива формула

$$\mathbb{W}(R)\mathbb{W}(R') = \mathbb{W}(R')\mathbb{W}(R).$$

Другими словами, операторы $\mathbb{W}(R)$ и $\mathbb{W}(R')$ коммутируют. Утверждение непосредственно вытекает из простой адельной формулы для характеров

$$\chi_\infty(q)\prod_p \chi_p(q) = 1, q \in \mathbb{Q}.$$

Таким образом, исходная квантовая системы при ограничении на рациональные числа приобретает классические свойства.

При этом происходит коллапс волновой функции. Рассмотрим для примера поведение вакуумного вектора при аналогичном ограничении на рациональные числа. Справедлива простая формула

$$\Omega(R) = \Omega_\infty(r)\prod_p \Omega_p(r) = \begin{cases} 1, r \in L, \\ 0, r \notin L. \end{cases}$$

Таким образом, при ограничении вакуумного состояния на рациональные числа в фундаментальной области решетки вакуумное состояние превращается в функцию, равную единице в начале координат и нулю во всех других точках фундаментальной области. Другими словами, состояние стало классическим (координата и импульс частицы определены однозначно).

8 Заключительные замечания

В заключение дадим краткую физическую интерпретацию полученных результатов. Поскольку результат измерения представляется всегда рациональным числом, фазовое пространство одномерной классической частицы можно рассматривать как двумерное пространство на полем рациональных чисел.

Далее, в каждом из локальных расширений (вещественном или p-адическом) исходного фазового пространства строится нетривиальная квантовая теория. Оказывается, что если в построенных таким образом квантовых моделях опять вернуться к рациональным числам, при этом учесть вклады всех квантовых теорий (вещественной и всех p-адических), то вклады различных теорий чудесным образом компенсируются, и система опять проибретает классические свойства.

Список литературы

[1] Schlosshauer M. Decoherence, the measurement problem and interpretation of quantum mechanics. Rev. Mod. Phys. **76** (4), 1267-1305, 2005

[2] Volovich I. p-Adic strings. Class. Quant. Grav. **4**, L83-L87, 1987

[3] Vladimirov V., Volovich I., Zelenov E. p-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapure, 1994

[4] Dragivich B., Khrennikov A., Kosyrev S., Volovich I. On p-adic mathematical physics. p-Adic numbers, ultrametric analysis and appl. **1** (1), 1-18, 2009

[5] Manin Yu. Reflections on arithmetical physics, in "Conformal invariance and string theory", 293–303, Academic Press, Boston, MA, 1989

[6] Freund P. G. O., Witten E. Adelic string amplitudes. Phys. Lett. B 199, 191-194, 1987

[7] Vladimirov V. On the Freund–Witten Adelic Formular for Veneziano Amplitudes. Lett. Math. Phys., **27**, 123–131, 1993

[8] Vladimirov V. Regularized adelic formulas for string and superstring amplitudes in one-class quadratic fields. Theoret. and Math. Phys., **164**, 1101–1109, 2010

[9] Dragovich B. Adelic model of harmonic oscillator. Theor. Math. Phys. **101**, 1404-1415, 1994

[10] Dragovich B. p-Adic and adelic quantum mechanics.Proc. Steklov Math. Inst. **245**, 72-85, 2004

[11] Переломов А. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987

[12] Cartier P. Quantum mechanical commutation relations and theta-functions. Proc. Sympos. Pure Math., **9**, 361-383, 1966.

[13] Зеленов Е. p-Адическая квантовая механика и когерентные состояния I. Теоретическая и математическая физика, **86**, 210-220, 1991